10.3.4 Integrování metodou per partes I

Předpoklady: 10303

Smutná zpráva: integrování je daleko obtížnější než derivování. Neexistuje obecný vzorec pro integrování součinu a podílu, ani obecný vzorec pro integrování složených funkcí.

Dobrá zpráva: Existují ještě další metody, jak integrování usnadnit.

Metoda per partes (po částech) vychází ze vzorce pro derivování součinu:

$(uv)' = u'v + uv'$ / obě strany rovnosti integrujeme

$$\int (uv)'\,dx = \int (u'v + uv')\,dx$$
$$uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$$
$$uv - \int u'v\,dx = \int uv'\,dx$$
$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$$

Mají-li funkce u, v v intervalu $(a;b)$ spojité derivace, pak v $(a;b)$ platí:
$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

Zkráceně píšeme: $\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$

Nevypadá to jako velký přínos. Z jednoho integrálu jsme udělali rozdíl funkce a integrálu. Přesto se vzorec často používá.

Př. 1: Zdůvodni, proč nemůžeme snadno určit $\int \sin x \cdot x\,dx$. Jak bychom mohli použít na výpočet tohoto integrálu vzorec pro integrování metodou per partes?

Problém s výpočtem integrálu $\int \sin x \cdot x\,dx$: uvnitř integrálu máme součin dvou funkcí $\sin x$ a x $\Rightarrow$ nemůžeme integrovat, protože neexistuje vzorec na integrování součinu.
Použití metody per partes: sledujeme ve vzorci funkci u: $\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$ $\Rightarrow$ v integrálu na pravé straně vystupuje derivace funkce u $\Rightarrow$ má smysl používat u funkcí, které derivováním „zmizí“, například $(x)' = 1$ $\Rightarrow$ v integrálu na pravé straně by součin zmizel.

$$\int uv' \quad dx = uv \qquad - \int u'v\,dx$$
$$\int x \cdot \sin x\,dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x)\,dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x\,dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$$

$u = x, u' = 1$

$v = -\cos x, v' = \sin x$

Pedagogická poznámka: Na předchozí příklad nechám studentům chvíli na rozmyšlení, ale pak ho samozřejmě počítáme na tabuli.

Př. 2: Ověř výsledek $\int x \cdot \sin x \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$.

Zderivujeme výsledek integrování:

$$(-x \cdot \cos x + \sin x + C)' = (-x \cdot \cos x)' + (\sin x)' + 0 = -[1 \cdot \cos x + x(-\sin x)] + \cos x = x \cdot \sin x$$

$\Rightarrow$ metodu integrování používáme u součinu, kde jedna z funkcí je mocninná (značíme ji u) a derivováním přejde na funkci konstantní.

Pedagogická poznámka: Během řešení následujícího příkladu nechávám studentům na tabuli řešení příkladu 1, aby se případně mohli podívat na vzor (spolehlivější než to, co opsali do sešitu). Integrační metoda per partes není pro studenty příliš obtížná na pochopení. Naprostá většina chyb se týká špatně opsaných nebo zapomenutých mínusů, přehlédnutých závorek a jiných nepozorností.
Z tohoto důvodu představuji per partes studentům jako cvičení preciznosti práce.

Př. 3: Vypočti: a) $\int \cos x \cdot x \, dx$ b) $\int x \cdot e^x \, dx$.

a) $\int \cos x \cdot x \, dx$

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx = x \cdot \sin x - (-\cos x) + C$$

$u = x, u' = 1$

$v = \sin x, v' = \cos x$

$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$$

b) $\int x \cdot e^x \, dx$

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

$u = x, u' = 1$

$v = e^x, v' = e^x$

Někdy musíme metodu použít vícekrát:

Pedagogická poznámka: U následujícího úkolu doporučuji studentům, aby druhý integrál počítali zvlášť do základního výpočtu pak dosadili až výsledek.
Dalším problémem je fakt, že už mají větší pocit zvládnutí metody a přestávají si psát vzorec nad výpočet nebo nedělají výpis funkcí, což vede k častým chybám.

Př. 4: Vypočti: a) $\int x^2 e^x \, dx$ b) $\int x^2 \cos x \, dx$.

a) $\int x^2 e^x \, dx$

$\int uv' \quad dx = uv \quad - \int u'v\, dx$

$\int x^2 \cdot e^x\, dx = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x\, dx = x^2 \cdot e^x - 2\int xe^x\, dx$

$u = x^2, u' = 2x$

$v = e^x, v' = e^x$

integrál $\int x \cdot e^x\, dx$ spočteme zvlášť:

$\int uv' \quad dx = uv \quad - \int u'v\, dx$

$\int x \cdot e^x\, dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x\, dx = x \cdot e^x - \int e^x\, dx = x \cdot e^x - e^x + C$

$u = x, u' = 1$

$v = e^x, v' = e^x$

Dosadíme:

$\int x^2 \cdot e^x\, dx = x^2 \cdot e^x - 2\int xe^x\, dx = x^2 \cdot e^x - 2\left(x \cdot e^x - e^x\right) + C = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C =$

$= e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C$

b) $\int x^2 \cos x\, dx$

$\int uv' \quad dx = uv \quad - \int u'v\, dx$

$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x\, dx = x^2 \cdot \sin x - 2\int x \cdot \sin x\, dx$

$u = x^2, u' = 2x$

$v = \sin x, v' = \cos x$

integrál $\int x \cdot \sin x\, dx$ spočteme zvlášť:

$\int uv' \quad dx = uv \quad - \int u'v\, dx$

$\int x \cdot \sin x\, dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x)\, dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$

$u = x, u' = 1$

$v = -\cos x, v' = \sin x$

Dosadíme:

$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \cdot \sin x - 2\int x \cdot \sin x\, dx = x^2 \cdot \sin x - 2[-x \cdot \cos x + \sin x] + C =$

$= x^2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2\sin x + C$

Pedagogická poznámka: Následující příklad už je pouze bonbónkem pro nejlepší.

Př. 5: Vypočti $\int x^3 a^x\, dx$.

Na první pohled je jasné, že nás nečeká nic jednoduchého. Než zderivujeme x^3 k jedničce budeme muset vzorec pro per partes použít třikrát.
Postup už nerozepisujeme:

$$\int x^3 a^x\,dx = x^3\frac{a^x}{\ln a} - \int 3x^2\frac{a^x}{\ln a}\,dx = x^3\frac{a^x}{\ln a} - \frac{3}{\ln a}\int x^2 a^x\,dx =$$

$$= x^3\frac{a^x}{\ln a} - \frac{3}{\ln a}\left[x^2\frac{a^x}{\ln a} - \int 2x\frac{a^x}{\ln a}\,dx\right] = x^3\frac{a^x}{\ln a} - \frac{3x^2a^x}{\ln^2 a} + \frac{6}{\ln^2 a}\int xa^x\,dx =$$

$$= x^3\frac{a^x}{\ln a} - \frac{3x^2a^x}{\ln^2 a} + \frac{6}{\ln^2 a}\left[x\frac{a^x}{\ln a} - \int 1\cdot\frac{a^x}{\ln a}\,dx\right] = x^3\frac{a^x}{\ln a} - \frac{3x^2a^x}{\ln^2 a} + \frac{6xa^x}{\ln^3 a} - \frac{6}{\ln^3 a}\int a^x\,dx =$$

$$= x^3\frac{a^x}{\ln a} - \frac{3x^2a^x}{\ln^2 a} + \frac{6xa^x}{\ln^3 a} - \frac{6a^x}{\ln^4 a} + C$$

Př. 6: Petáková:
strana 165/cvičení 90 f) i)

Shrnutí: Metoda per partes postavená na vzorci pro derivaci součinu umožňuje integrovat součiny, ve kterých se jeden ze členů derivuje k jedničce.